Correction TD10

December 3, 2018

1 Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1.1 f une densité de probabilité

f est une densité de probabilité si est seulement si

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{2}$$

1.1.1 Première partie

f(x)= 0 si x < 0 par définition, et $e^{-x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$ donc $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

1.1.2 Deuxième partie

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \\
\iff &\int_{-\infty}^{0} 0 \; dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx \\
\iff &0 + \Big[-e^{-x}\Big]_0^{+\infty} \\
\iff &-e^{-\infty} - -e^{0} \\
\iff &1
\end{aligned}$$

1.2 Fonction de répartition de la variable aléatoire X

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, F(x) =& P(X < x) \\ & \iff \int_{-\infty}^{x} f(u)du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{si } x \in]-\infty, 0], \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \; dx = 0 \\
&\text{si } x \in]0, +\infty[, \quad F(x) = \int_{0}^{x} e^{-u} du \\
&\iff \qquad \Big[- e^{-u} \Big]_{0}^{x} \\
&\iff \qquad - e^{-x} - -e^{-0} \\
&\iff \qquad 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1.3 Espérance de X

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] =& \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
&\iff \int_{+\infty}^{0} x \quad 0 \quad dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx \\
&\iff \int_{+\infty}^{0} x \quad 0 \quad dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx \\
&\iff 0 + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx \\
&\iff \int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx
\end{aligned}$$

$$u = x \quad v' = e^{-x}$$
$$u' = 1 \quad v = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}dx$$

$$\iff \underbrace{\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0}^{0} \quad -0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$\iff \Big[-e^{-x}\Big]_0^{+\infty}$$

$$0 - (-e^0) = 1$$

1.4 Variance de X

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$
$$\iff \int_{-\infty}^{0} x^2 \times 0 \; dx + \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$$
$$\iff \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$$

$$u = x^2 \quad v' = e^{-x}$$
$$u' = 2x \quad v = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} -x^2e^{-x}dx = \Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2xe^{-x}dx \\
\iff 0 - 0 - -2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \\
\iff +2\mathbb{E}[X] \\
\iff 2(1)
\end{aligned}
$$

$$
Var(X) = 2 - (1)^2 = 1
$$

1.5 Prenons un peu de temps pour considérer la loi exponentielle.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_exponentielle

2 Exercice 2

$$
f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| > k \\ 1 + x \text{ si } x \leq k \end{cases}
$$

2.1 Rappel

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& |x| \geq k \\
\text{cas 1: } x \geq 0 & \\
& x \geq 5 \\
\text{cas 2: } x \leq 0 & \\
& -x \geq 5 \iff x \leq -5 \\
\text{donc} & \\
x \geq 5 \text{ ou } x \leq -5 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|x| < k \\
\text{cas 1: } x \leq 0 & \\
&x < 5 \\
\text{cas 2: } x < 0 & \\
&-x < 5 \iff x > -5 \\
\text{donc} & \\
-5 < x < 5 &
\end{aligned}
$$

Nous pouvons donc réécrire f de manière un peu plus sympathique comme.

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -k \\ 1 + x & \text{si } -k \leq x \leq k \\ 0 & \text{si } x > k \end{cases}
$$

2.2 Question 1

$$
\begin{aligned}
&f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1
\end{aligned}
$$

2.2.1 a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\begin{aligned}
&\iff \int_{-\infty}^{-k} 0\ dx + \int_{-k}^{k} (1+x)dx + \int_{k}^{+\infty} 0\ dx = 1 \\
&\iff \int_{-k}^{k} (1+x)dx = 1 \\
&\iff \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-k}^{k} = 1 \\
&\iff k + \frac{k^2}{2} - \left((-k) + \frac{(-k)^2}{2}\right) = 1 \\
&\iff k + \frac{k^2}{2} - \left(-k + \frac{k^2}{2}\right) = 1 \\
&\iff k + \frac{k^2}{2} + k - \frac{k^2}{2} = 1 \\
&\iff 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.2.2 b

Nous savons que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il reste a montrer que $f(x) \geq 0$ pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\
&1 + -\frac{1}{2} \leq 1 + x \leq 1 + \frac{1}{2} \\
&\frac{1}{2} \leq 1 + x \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Donc quand $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $f(x) \in [3; 2]$ et par suite $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

2.3 Question 2

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, F(x) =& P(X < x)\\ \iff& \int_{-\infty}^{x} f(u)du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{si } x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[, \quad F(x) &= \int_{-\infty}^{x} 0 \ du = 0\\
\text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad F(x) \quad &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du\\
&\iff 0 + \int_{-\frac{1}{2}}^{x} (1+u)du\\
&\iff \left[u + \frac{u^2}{2}\right]_0^x\\
&\iff x + \frac{x^2}{2}\\
\text{si } x \in [\frac{1}{2}, +\infty], \qquad F(x) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(u)du + \int_{\frac{1}{2}}^{x} 0 \ du\\
&\iff 1
\end{aligned}$$

2.4 Espérance de X

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
&\iff \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} x \quad 0 \quad dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(1+x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x \times 0 \ dx \\
&\iff \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x + x^2 dx \\
&\iff \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&\iff \left[x^2(\frac{1}{2} + \frac{x}{3})\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&\iff \frac{1}{2}^2(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3}) - \frac{1}{2}^2(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{3}) \\
&\iff \frac{1}{2}^2(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3}) \\
\iff & \ \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

2.5 Variance de X

$$
\begin{aligned}
Var(X) =& \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\
\mathbb{E}[X^2] =& \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} x^2 \quad 0 \quad dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2(1+x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x^2 \times 0 \ dx \\
\iff & \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 + x^3 dx \\
\iff & \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
\iff & \left[x^3(\frac{1}{3} + \frac{x}{4})\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
\iff & \frac{1}{2}^3(\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4}) - (-\frac{1}{2}^3)(\frac{1}{2} - (\frac{\frac{1}{2}}{4})) \\
\iff & \frac{1}{2}^3(\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} + \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{4}) \\
\iff & \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) =& \frac{1}{12} - (\frac{1}{12})^2 \\
\iff & \frac{1}{12}(1 - (\frac{1}{12}) \\
\iff & \frac{11}{12^2}
\end{aligned}
$$

3 Exercice 3

L'exercice 3 est dans le même esprit que l'exercice précédent.

$$
f(x) = \begin{cases} k(4x - x^2) \text{ si } x \in]0, 4[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
$$

Nous pouvons réécrire la définition comme

$$
f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ k(4x - x^2) \text{ si } x \in]0, 4[\\ 0 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}
$$

f est une densité de probabilité si et seulement si,

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

3.0.1 a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$\iff \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{4} k(4x - x^2)dx + \int_{4}^{+\infty} 0\ dx = 1$$
$$\iff \int_{0}^{4} k(4x - x^2)dx = 1$$
$$\iff k\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 1$$
$$\iff k(2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3}) - 0 = 1$$
$$\iff k\frac{32}{3} = 1$$
$$\iff k = \frac{3}{32}$$

3.0.2 b

Nous savons que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Il reste à montrer que $f(x) \geq 0$ pour $0 < x < 4$. Une méthode serait d'utiliser le tableau de signe et de déterminer pour quelles valeurs de x $(4x - x^2) > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Valeurs critique:} \\ 4x - x^2 = 0 \\ x(x-4) = 0 \\ \iff \quad x = 0 \text{ et } x = 4 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
x	$-$	0			$+$
$(4-x)$	$+$			0	$-$
$x(4-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $x(x-4) > 0$ pour x $\in$]0,4[, donc $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi f(x) est une densité de probabilité.

4 Question 2

Fonction de répartition de la variable aléatoire X.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, F(x) =& P(X < x) \\
&\iff \int_{-\infty}^{x} f(u)\ du \\
&\quad \text{si } x \in]-\infty, 0], \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ du = 0 \\
&\quad \text{si } x \in]0, 4[, \quad F(x) \quad = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\
&\qquad \iff 0 + \int_{0}^{x} \frac{3}{32}(4u - u^2)du \\
&\qquad \iff \frac{3}{32}\int_{0}^{x} (4u - u^2)du \\
&\qquad \iff \frac{3}{32}\left[2u^2 - \frac{u^3}{3}\right]_0^x \\
&\qquad \iff \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - 0\right) \\
&\qquad \iff \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \\
&\quad \text{si } x \in [4, +\infty], \quad F(x) = \int_{-\infty}^{4} f(u)du + \int_{4}^{x} 0\ du \\
&\qquad \iff 1
\end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \text{ si } x \in]0, 4[\\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

5 Question 3

5.1 Espérance de X

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
&\iff \int_{-\infty}^{0} x \times \quad 0 \quad dx + \frac{3}{32}\int_{0}^{4} x \times (4x - x^2) dx + \int_{4}^{+\infty} x \times 0 \ dx \\
&\iff \frac{3}{32}\int_{0}^{4} (4x^2 - x^3) dx \\
&\iff \frac{3}{32}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 \\
&\iff \frac{3}{32}\frac{64}{3} = 2
\end{aligned}$$

5.2 Variance de X

$$\begin{aligned}
Var(X) =& \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\
\iff & \int_{-\infty}^{0} x^2 \quad 0 \quad dx + \int_{0}^{4} x^2 \frac{3}{32}(4x - x^2) dx + \int_{4}^{+\infty} x^2 \times 0 \ dx \\
\iff & \int_{-\infty}^{0} x \times \quad 0 \quad dx + \frac{3}{32}\int_{0}^{4} x^2 \times (4x - x^2) dx + \int_{4}^{+\infty} x \times 0 \ dx \\
\iff & \frac{3}{32}\int_{0}^{4} 4x^3 - x^4 dx \\
\iff & \frac{3}{32}\left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 \\
\iff & \frac{3}{32}\frac{256}{5} = \frac{24}{5}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) = & \frac{24}{5} - (2)^2 \\
\iff & \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$