Correction TD1

September 25, 2018

1 Rappels

Considérons A et B deux sous-ensembles de l'ensemble de E. Ici E est un ensemble fondamental, c'est à dire l'ensemble de tous les possibles.

- $\mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble E. Donc nous pouvons définir

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A|A \subset E\}$$

- $A \cup B = \{x \in E|x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \in E|x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x \in E|x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- $\bar{A} = x \in E|x \notin A$
- $Card(E)$ nombre d'éléments d'appartenant à E
- $\emptyset \subset A$ et $\emptyset \subset \bar{A}$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = E$
- $card(\emptyset) = 0$
- $\bar{\emptyset} = E$

2 Exercice 1

Soit $E = \{0, 1, 2\}$,

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\emptyset\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

3 Exercice 2

Soit $E = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$

- $(0,1)$ est un n-uplet - une collection ordonnée d'objets
- $(0,1) \neq (1,0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) = &\{\{\emptyset\},\{(0,1)\},\{(1,0)\},\{(1,1)\},\\ &\{(0,1),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\},\{(1,0),(1,1)\},\\ &\{(0,1),(1,0),(1,1)\}\}\end{aligned}$$

3.1 Si Card(E) = n

Quel est le $Card(\mathcal{P}(\Omega))$?

4 Exercice 3

Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$, Soit $A = \{a,b\}$, $B = \{b,d,e\}$ et $C = \{a,e\}$

1. $A \cup B = \{a,b,d,e\}$
2. $A \cap B = \{b\}$
3. $\bar{A} = \{c,d,e\}$
4. $A \setminus B = \{a\}$
5. $A \cup \bar{B} = \{a\}$
6. $(A \cup (B \cup C)) = \{a,b,d,e\}$
7. $(A \cup B) \cup C = \{a,b,d,e\}$
8. $(A \cap B) \cap C = \emptyset$
9. $(A \cap B) \cap C = \emptyset$
10. $(A \cap B) \cup C = \{a,b,e\}$
11. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{a,b\}$
12. $A \cup (B \cap C) = \{a,b,e\}$
13. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a,b,e\}$
14. $\overline{(A \cup B)} = \{c\}$

15. $\bar{A} \cap \bar{B} = \{c\}$
16. $\overline{A \cap B} = \{a, c, d, e\}$
17. $\bar{A} \cup \bar{B} = \{a, c, d, e\}$

5 Exercice 4

Soit A, B, C trois sous-ensemble de E

5.1 Question 1

$A \subset (A \cup B)$

$$A \subset (A \cup B) \iff \forall x \in A, x \in (A \cup B)$$
$$(x \in A) \implies (x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (A \cup B)$$

5.2 Question 2

$(A \cap B) \subset A$

$$(A \cap B) \subset A \iff \forall x \in (A \cap B), x \in A$$
$$[x \in A \text{ et } x \in B] \implies [x \in A], Donc\ A \cap B \subset A$$

5.3 Question 3

$(A \cup A) = A$

$$A \cup A \iff [x \in A \text{ ou } x \in A] \iff x \in A$$

5.4 Question 4

$(A \cap A) = A$

$$A \cap A \iff [x \in A \text{ et } x \in A] \iff x \in A$$

5.5 Question 5

$(A \cup E) = E \iff A \subset E \text{ et } E \subset A$

$$A \cup E \iff [x \in A \text{ ou } x \in E]$$
$$\text{or par hypothèse } A \subset E, \text{ donc } \forall x \in A, x \in E$$
$$[x \in E \text{ ou } x \in E] \iff x \in E \iff A \cup E \subset E$$

il reste à montrer que $E \subset A \cup E$, ref Question 1
Remarque: si $A \subset E \iff A \cup E = E$

5.6 Question 6

$(A \cap E) = A \iff A \subset (A \cap E)$ et $(A \cap E) \subset A$

$$\begin{aligned} & A \cap E \iff (x \in A \text{ et } x \in E) \\ & \text{Montrons que } A \subset (A \cap E) \\ & A = [x \in A] \text{ or } A \subset E \iff \forall x \in A, x \in E \\ & \implies [x \in A \text{ et } x \in E] \iff x \in A \cap B \end{aligned}$$

il reste à montrer que $(A \cap E) \subset A$, ref Question 2.
Remarque: si $A \subset E \iff A \cap E = A$

5.7 Question 7

$$A \cup \emptyset = A$$

On peut utiliser les résultats précédents pour répondre à cette question. On sait que $\emptyset \subset A$, Donc $A \cup \emptyset = A$ (ref question 5)

5.8 Question 8

$A \cap \emptyset = \emptyset$ On sait que $\emptyset \subset A$, Donc $A \cap \emptyset = \emptyset$ (ref question 6)

5.9 Question 9

$A \cup B = B \cup A$

$$A \cup B \iff [x \in A \text{ ou } x \in B] \iff [x \in B \text{ ou } x \in A] \iff B \cup A$$

5.10 Question 10

$A \cap B = B \cap A$

$$A \cap B \iff [x \in A \text{ et } x \in B] \iff [x \in B \text{ et } x \in A] \iff B \cap A$$

5.11 Question 11

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C & \iff [x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C] \\ & \iff [(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C] \\ & \iff [x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)] \\ & \iff [x \in A \cup (B \cup C)] \end{aligned}$$

5.12 Question 12

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &\iff [x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C] \\
&\iff [(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C] \\
&\iff [x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)] \\
&\iff [x \in A \cap (B \cap C)]
\end{aligned}$$

5.13 Question 13

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) = & [x \in A \text{ et } (x \in B \cap C)] \\
&\iff [x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)] \\
&\iff [(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)] \\
&\iff [(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)] \\
&\iff [(x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)]
\end{aligned}$$

5.14 Question 14

$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &\iff [x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C)] \\
&\iff [x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)] \\
&\iff [(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)] \\
&\iff [x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]
\end{aligned}$$

5.15 Question 15

$\bar{\bar{A}} = A$

Nous savons que

$$\begin{aligned}
[x \notin A] &\iff [x \in \bar{A}] \\
\text{Donc } [x \notin \bar{A}] &\iff [x \in \bar{\bar{A}}]
\end{aligned}$$

or $[x \notin \bar{A}] \iff [x \in A]$
Donc $[x \in A] \iff [x \in \bar{\bar{A}}]$

5.16 Question 16

$\bar{\emptyset} = E$

Nous savons que $\emptyset \subset E$ donc $E \cup \emptyset = E$. Nous savons aussi que $\bar{\emptyset} \cup \emptyset = E$. Donc $\bar{\emptyset} = E$.

5.17 Question 17

$\bar{E} = \emptyset$

$$
\begin{aligned}
\bar{\emptyset} = E &\iff \bar{\bar{\emptyset}} = \bar{E}, \text{ d'après la question 15} \\
&\iff \bar{\bar{\emptyset}} = \emptyset
\end{aligned}
$$

Autre solution Si E est l'ensemble fondamental. Donc $\bar{E} = \{x \in E | x \notin E\}$. Cette définition nous dit que $\bar{E}$ est vide. Donc $\bar{E} = \emptyset$

5.18 Question 18

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &\iff [x \notin A \cup B] \\
&\iff [x \notin A \text{ et } x \notin B] \\
&\iff [x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}] \\
&\iff [x \in \bar{A} \cap \bar{B}] \\
\text{Donc } \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}
\end{aligned}
$$

5.19 Question 19

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &\iff [x \notin A \cap B] \\
&\iff [x \notin A \text{ ou } x \notin B] \\
&\iff [x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B}] \\
&\iff [x \in \bar{A} \cup \bar{B}] \\
&\text{Donc } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}
\end{aligned}
$$

6 Exercice 5

Il s'agit de la différence symétrique de deux ensembles. Mais nous n'avons pas besoin de le savoir pour travailler. il ne faut pas vous laisser dérouter par cette nouvelle opération. Ici la clé est de vous reposer sur la définition qu'on vous donne dans l'exercice.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

6.1 Question 1

Montrer que $(A \setminus B) = A \cup \bar{B}$

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) &\iff [x \in A \text{ et } x \notin B]) \\
&\iff [x \in A \text{ et } x \in \bar{B}] \\
&\iff [x \in A \cap \bar{B}] \\
&\text{Donc } (A \setminus B) = (A \cap \bar{B})
\end{aligned}$$

6.2 Question 2

Déduisez que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ On commence par utiliser la définition de $A \Delta B$, puis on remplace avec le résultat de la question précédente

$$\begin{aligned}
A \Delta B =& (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
\iff& (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})
\end{aligned}$$

Puis on peut utiliser les résultats des question 13 et 14.

$$\begin{aligned}
&\iff (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \\
&\iff \big((A \cap \bar{B}) \cup B\big) \cap \big((A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}\big) \\
&\iff \big(B \cup (A \cap \bar{B})\big) \cap \big(\bar{A} \cup (A \cap \bar{B})\big) \\
&\iff \big(B \cup A) \cap (B \cup \bar{B})\big) \cap \big((\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})\big) \\
&\iff (B \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})
\end{aligned}$$

Car $A \cup \bar{A} = E$ et que $(B \cup A) \cap E = (B \cup A)$ Référence exercice 4 question 6. Donc d'après le résultat de la question 2 nous avons,

$$\begin{aligned}
&\iff (B \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \\
&\iff (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

7 Exercice 6

Soit E = [1,2] et F = [3,4]

$E \times F = [(x, y) | x \in E \text{ et } y \in F] \iff \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

$F \times E = [(x, y) | x \in F \text{ et } y \in E] \iff \{(3,1), (4,1), (3,2), (4,2)\}$