MICROECONOMIE S2:

https://economie-gestion.com

EXERCICE 1:

Soit une entreprise produisant un seul bien. Cette entreprise a pour fonction de production $Q = 4K^{\alpha}L^{\beta}$. Le prix du capital est P_K, celui du travail P_L. Nous noterons C le coût total. Nous supposerons que cette entreprise a un budget à ne pas dépasser : C_0

1) Déterminez à l'aide du Lagrangien les quantités de facteurs optimales pour ce producteur.
2) Cette fonction est-elle homogène ? De quel degré ?
3) Si $\beta = 1/3$, quelle serait la nature des rendements d'échelle ?
4) Application numérique : Soit $P_k = 8$, $P_L = 4$, $C_0 = 48$ et $\beta = 1/3$
   a) Quel est le niveau de production de cette firme à l'optimum lorsqu'elle a des rendements d'échelle constant ?
   b) Quel serait son nouveau niveau de production si cette entreprise décidait de doubler ses facteurs de production ? Pourquoi ?
   c) Quelles seraient les nouvelles quantités de facteurs optimales si le prix du travail doublait ?

Corrigé: voir 2 eme page

CORRIGé 1:

1) Programme du producteur :

$$\begin{cases} MaxQ = 4K^{\alpha}L^{\beta} \\ P_K K + P_L L = C \end{cases}$$

Lagrangien :

$$L(K, L, \lambda) = 4K^{\alpha}L^{\beta} + \lambda(C - P_K K - P_L L)$$

Les conditions nécessaires sont les conditions du premier ordre. Elles sont égales à 0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow 4\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} - \lambda P_K = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow 4\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} - \lambda P_L = 0 \quad (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow C - P_K K - P_L L = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Les conditions suffisantes sont les conditions du second ordre. Elles sont vérifiées.

Des deux premières condition¨s du premier ordre nous obtenons :

$$\lambda = \frac{4\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{P_K} = \frac{4\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}}{P_L}$$

Donc : $\dfrac{\alpha L}{\beta K} = \dfrac{P_K}{P_L}$ d'où $L = \dfrac{\beta P_K}{\alpha P_L} K$

On remplace L dans la contrainte (équation 3)
D'où :

$$C - P_K K - P_L \frac{\beta P_K}{\alpha P_L} K = 0$$

$$\Rightarrow C = P_K K + P_K \frac{\beta}{\alpha} K \Leftrightarrow C = K\left(P_K + \frac{\beta}{\alpha} P_K\right)$$

$$\Rightarrow K^* = \frac{C}{P_K\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)}$$

Par conséquent :

$$L^* = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_K}{P_L}\frac{C}{P_K\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\beta C}{P_L(\alpha+\beta)}$$

Les facteurs de production optimaux pour ce producteur sont donc $K^* = \dfrac{C}{P_K\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)}$

$$L^* = \frac{\beta C}{P_L(\alpha+\beta)}.$$

2) Nous avons une fonction de type Cobb Douglas. Cette fonction est donc homo
égal à la somme des puissance.
Montrons le :

$$Q(tK,tL) = 4(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta}$$
$$= t^{\alpha+\beta}4K^{\alpha}L^{\beta}$$
$$= t^{\alpha+\beta}Q(K,L)$$

Nous avons donc bien une fonction homogène de degré $\alpha+\beta$.

3) Il faut maintenant discuter de la valeur de α
Si α >2/3 alors $\alpha+\beta$ >1 : rendement d'échelle croissant.
Si α <2/3 alors $\alpha+\beta$ <1 : rendement d'échelle décroissant.
Si α =2/3 alors $\alpha+\beta$ =1 : rendement d'échelle constant.

4) a) Nous avons des rendement d'échelle constant donc puisque $\beta = 1/3$, α doi

Par conséquent :

$$K^* = \frac{48}{8\left(\frac{1/3+2/3}{2/3}\right)} = \frac{6}{3/2} = 4$$

$$L^* = \frac{1/3\times 48}{4\left(1/3+2/3\right)} = \frac{48}{12} = 4$$

A l'optimum, ce producteur devra utiliser 4 unités de facteur capital et 4 unité de

b) Nous avons des rendement d'échelle constant. Donc : $Q(tK,tL) = tQ(K,L)$. Po
production il faut que t=2. Par conséquent, il faudra doubler le facteur capital et l

c) $P_L = 8$
K* ne dépend pas du prix du travail. Il reste donc le même : K*=4.

$$L^* = \frac{1/3\times 48}{8\left(1/3+2/3\right)} = \frac{48}{24} = 2.$$

La quantité de travail est divisé par deux quand le prix du travail double.